Optimisation dans un Hilbert

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
— 213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
— 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
— 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
— 253 : Utilisation de la notion de convexité.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit H un espace Hilbert et $J : H \to \mathbb{R}$ convexe, continue et coercive (ie telle que $J(x) \xrightarrow[||x|| \to +\infty]{} +\infty$). Il existe α tel que $J(\alpha) = \inf\limits_{x \in H} J(x)$.*

Preuve : L'idée de la preuve est de montrer et exploiter la compacité faible de la boule unité dans un Hilbert.
Soit (x_k) une suite de H telle que $J(x_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \inf\limits_{x \in H} J(x)$.

Étape 1 : Montrons que la suite (x_k) est bornée.

Par l'absurde, si (x_k) est non bornée, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $||x_{\varphi(k)}|| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$. Par coercivité, on a $J(x_{\varphi(k)}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ ce qui contredit la définition de (x_k) d'où il existe $C > 0$, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}, ||x_k|| \leq C$.

Étape 2 : Montrons que l'on peut extraire de (x_k) une sous-suite faiblement convergente.

La suite $(\langle x_0, x_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle et bornée par inégalité de Cauchy-Schwarz, donc par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(\langle x_0, x_{\varphi_0(k)} \rangle)$ converge.

Par récurrence, pour $i \in \mathbb{N}$, supposons avoir construit $\varphi_0, \dots, \varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $\forall p \in [\![0, i]\!], (\langle x_p, x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(k)} \rangle)$ converge.
La suite $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(k)} \rangle)$ est bornée d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc il existe φ_{i+1} : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_{i+1}(k)} \rangle)$.
On pose $\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & k & \mapsto & \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k(k) \end{array}$ (procédé d'extraction diagonale) et $y_k = x_{\psi(k)}$.
On a pour tout $p \in \mathbb{N}, (\langle x_p, y_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

Considérons $F = \mathrm{Vect}(x_p, p \in \mathbb{N})$,
On a pour tout $\tilde{v} \in F$, $(\langle \tilde{v}, y_k \rangle)$ converge.
Comme H est un espace de Hilbert, par théorème du supplémentaire orthogonal on a $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.

Montrons alors que pour tout $u \in H$, $(\langle u, y_k \rangle)$ converge.
Soit $u \in H$, $\varepsilon > 0$, décomposons u comme $u = v + w$ avec $v \in \overline{F}$ et $w \in F^\perp$. Il existe $\tilde{v} \in F$ tel que $||v - \tilde{v}|| \leq \varepsilon$.
On a pour tout $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\langle u, y_k - y_l \rangle| &= |\langle v, y_k - y_l \rangle| \\ &\leq |\langle v - \tilde{v}, y_k - y_k \rangle| + |\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle| \\ &\leq \underbrace{||v - \tilde{v}||}_{\leq \varepsilon} \underbrace{||y_k - y_l||}_{\leq 2C} + |\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle| \end{aligned}$$

De plus, $(\langle \tilde{v}, y_k \rangle)$ converge donc est de Cauchy donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle| \leq \varepsilon$ pour $k, l \geq N$, d'où $k, l \geq N, |\langle u, y_k - y_l \rangle| \leq 2C\varepsilon + \varepsilon = (2C + 1)\varepsilon$.
La suite $(\langle u, y_k \rangle)$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet donc converge.

Étape 3 : Construisons α avec le théorème de Riesz

On pose $\begin{array}{rccc} f & : & H & \to & \mathbb{R} \\ & & u & \mapsto & \lim\limits_{k \to +\infty} \langle u, y_k \rangle \end{array}$, f est linéaire et continue par inégalité de Cauchy-Schwarz.
D'après le théorème de représentation de Riesz,

$$\exists \alpha \in H, \forall u \in H, f(u) = \langle u, \alpha \rangle$$

Montrons que α convient,
Soit $\beta > \inf\limits_{x \in H} J(x)$, soit $C_\beta = \{x \in H, J(x) \leq \beta\}$.
C_β est convexe (épigraphe d'une fonction convexe), fermé (en tant qu'image réciproque d'un fermé par une fonction continue), non vide.
Soit $p : H \to H$ l'opérateur de projection sur C_β.
Comme $J(y_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \inf\limits_{x \in H} J(x)$, $y_k \in C_\beta$ à partir d'un certain rang. D'où :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \langle y_k - p(\alpha), \alpha - p(\alpha) \rangle \leq 0$$

D'où pour $k \to +\infty$, $||\alpha - p(\alpha)||^2 \leq 0$ d'où $\alpha = p(\alpha)$ et $\alpha \in C_\beta$.
D'où $\forall \beta > \inf\limits_{x \in H} J(x), J(\alpha) \leq \beta$ donc $J(\alpha) = \inf\limits_{x \in H} J(x)$. $\square$